Model teza clasa a 8-a.

Exercitul 1.

a) Inversul numărului $3-2\sqrt{2}$ este egal cu...

b) Rezultatul calculului $\sqrt{10^2-6^2}$ este egal cu...

c) Numărul natural cuprins în intervalul $(\sqrt{49};\sqrt{64}]$ este...

Rezolvare:

a) inversul numărului $3-2\sqrt{2}$ este $\overset{3+2\sqrt{2}}{\overline{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}}}$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2}.$$

b) $\sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8.$

c) $(\sqrt{49};\ \sqrt{64}] = (7;8] \cap \mathbb{N} = \{8\}.$

Exercitul 2.

a) Média aritmetică a numerelor $2+\sqrt{12}$ și $4-2\sqrt{3}$ este egală cu...

b) Rezultatul calculului $0,1(6) - 1,5$ este egal cu...

c) Partea întreagă a numărului $-2,8$ este egală cu...

Rezolvare.

a) $$M_a = \frac{2+\sqrt{12}+4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3.$$

b) $$0,1(6) = \frac{16-1}{90} = {}^{(15}\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} - {}^{(5}\frac{15}{10} = \frac{1}{6} - {}^{3/}\frac{3}{2} = \frac{1-9}{6} = -{}^{(2}\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

c) $[-2,8] = -3.$

Exercițiul 3.

a) Dacă $(a+2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{Q}$ atunci a este egal cu...

b) Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid |x| \leq 2\}$. Elementele mulțimii A sunt...

c) Dintre numerele 7 și $4\sqrt{3}$ mai mare este numărul....

Rezolvare.

a) $(a+2)\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow a=-2 \in \mathbb{Q}$

b) $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$x \in [-2; 2] \cap \mathbb{N}^*$

$\{1; 2\}.$

c) 7 și $4\sqrt{3}$

$7^2 > (4\sqrt{3})^2$

$49 > 48 \Rightarrow 7 > 4\sqrt{3}.$

Exercițiul 4.

Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 6 cm.

Atunci:

a) aria bazei cubului este egală cu... cm^2

b) lungimea diagonalei unei fețe laterale este egală cu... cm.

c) perimetrul triunghiului ACB' este egal cu... cm

a) Baza cubului este un pătrat, atunci

$\mathcal{A}_{pătrat} = \ell^2$

$A_{pătrat} = 6^2 = 36\ cm^2$

b) diagonala pătratului $= \ell\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ cm.$

(fețele laterale ale cubului sunt pătrate).

c) $\mathcal{P}_{\Delta ACB'} = AC + BC' + AB'$ (cele 3 sunt diagonale

$= 6\sqrt{2} \cdot 3$ în pătratele

$= 18\sqrt{2}\ cm.$ $ABCD$, $BCC'B'$, $ABB'A'$)

Exercitiul 5. Fie $x = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{6}\right)^{-1} + \frac{\sqrt{18}}{2} - \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

a) Să se demonstreze că $x \in \mathbb{N}$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ dacă $x = 2\sqrt{n}$.

Rezolvare:

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{6}\right)^{-1} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{{}^{2-\sqrt{2})}6}{2+\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6(2-\sqrt{2})}{4-2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6 \cdot 2 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2}^{(2} = 6 \in \mathbb{N}.$$

b) $n \in \mathbb{N}$ dacă $x = 2\sqrt{n}$

$6 = 2\sqrt{n}\quad |:2$

$3 = \sqrt{n} \Rightarrow n = 9. \in \mathbb{N}.$

Exercitiul 6.

a) Să se simplifice raportul $\frac{x^2-5x+4}{2x-8}$ unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Să se arate că pentru orice $x \in (-1;1)$ expresia $E(x) = |x+3| + \sqrt{(x-1)^2}$ este pozitivă.

Rezolvare.

a) Descompunem mai întâi numărătorul fracției

$$x^2-5x+4 = x^2-4x-x+4$$
$$= x(x-4)-(x-4)$$
$$= (x-4)(x-1)$$

Descompunem numitorul fracției folosind metoda factorului comun.

$$2x-8 = 2(x-4)$$

Atunci fracția devine:

$$\frac{^{(x-4}(x-4)(x-1)}{2(x-4)} = \frac{x-1}{2}$$ (am simplificat fracția cu $x-4$)

b) $E(x) = |x+3| + \sqrt{(x-1)^2} > 0$. $(\forall)\, x \in (-1;1)$

$E(x) = |x+3| + |x-1|$.

$x \in (-1,1) \Rightarrow -1 < x < 1 \quad |+3$

$-1+3 < x+3 < 1+3$

$2 < x+3 < 4$ am demonstrat că $|x+3| = x+3$ pe intervalul $(-1;1)$.

$-1 < x < 1 \quad | +(-1)$

$-1-1 < x-1 < 1-1$

$-2 < x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x$. pe intervalul $(-1;1)$.

Atunci expresia $E(x)$ devine:

$E(x) = x+3+1-x$

$= 4 > 0$ (am demonstrat că este pozitivă pentru oricare $x \in (-1;1)$)

Exercițiul 7. Piramida VABC, cu baza triunghiul ABC, are toate muchiile de lungime 4 cm.

a) Realizați desenul și calculați aria ΔABC.

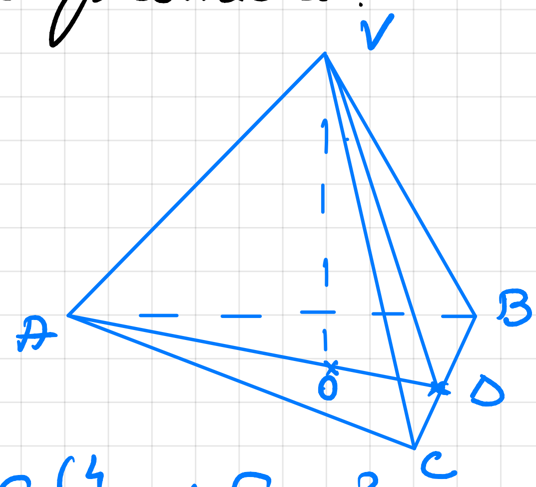
b) Demonstrați că dreptele BC și VA sunt perpendiculare.

c) Calculați aria ΔVAD. (AD mediană în ΔABC)

d) Calculați înălțimea piramidei.

Rezolvare.

a) ΔABC echilateral



$\mathcal{A}_{\Delta \text{ echilateral}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} \, {}^{(4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) Trebuie să demonstrăm că $BC \perp (VAD)$

Dreapta AD în $\triangle ABC$ echilateral este și mediatoare prin urmare $BC \perp AD$

$AD \subset (VAD)$ (1)

în $\triangle VBC$ echilateral, VD este înălțime $\Rightarrow$

$VD \perp BC$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $BC \perp (VAD)$. prin urmare $BC \perp VA$.

c) $\mathcal{A}_{\triangle VAD} = ?$

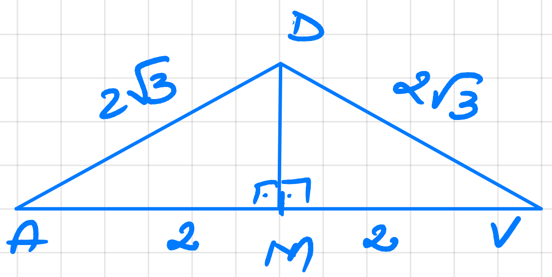
$VA = 4cm$

$AD = h_{\triangle}$ echilateral (înălțime în $\triangle$ echilateral)

$h_{\triangle echilateral} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $AD = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}cm$

$VD = h_{\triangle}$ echilateral VBC $\Rightarrow$ $VD = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

$\Rightarrow$ $\triangle DAV$ este isoscel de bază VA.



Fie $DM \perp AV$, $M \in (AV)$

M mijlocul segmentului AV. $\Rightarrow [AM] \equiv [MV]$

$= \frac{4}{2} = 2cm.$

$\mathcal{A}_{\triangle DAV} = \frac{DM \cdot AV}{2}$

$DM^2 = AD^2 - AM^2$ (teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ΔDMA).

$\Rightarrow DM^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2$

$= 12 - 4 = 8 \Rightarrow DM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

Atunci $A_{\Delta VAD} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2} \overset{(2}{=} 4\sqrt{2}$ cm^2.

c) $VO = ?$

ΔVOD dreptunghic $\left.\begin{array}{l} (VO \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow VO \perp AD)$

$VD^2 = VO^2 + OD^2$.

$(2\sqrt{3})^2 = VO^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$OD = \frac{1}{3} \cdot h_{\Delta \text{ echilateral}}$

$= \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$12 = VO^2 + \frac{12}{9}$

$\Rightarrow VO^2 = {}^{9)}12 - \frac{12}{9}$

$VO^2 = \frac{12 \cdot 9 - 12}{9} = \frac{8 \cdot 12}{9}$

$VO^2 = \frac{96}{9} \Rightarrow VO = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm