Fișa numărul 156.

Exercițiul 1. Se dă ecuația : $x^2 - 3x + 1 = 0$. Să se calculeze valoarea expresiilor:

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Rezolvare

$a x^2 + bx + c = 0.$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0.$

Relațiile lui Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$x^2 - 3x + 1 = 0.$ $a = 1,$ $b = -3,$ $c = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-3)}{1} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

a) $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

$3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot 1$

$9 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \Rightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 = 7.$

b) $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1^3$

$3^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot 1 \cdot 3$

$27 = x_1^3 + x_2^3 + 9$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 27 - 9 = 18.$

c) ${}^{x_2/}\frac{1}{x_1} + {}^{x_1/}\frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3}{1} = 3.$

Exercitiul 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - x - a = 0$ să existe relația:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

b) $x_1^3 + x_2^3 = 8$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}$

Rezolvare

$$x^2 - x - a = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{(-1)}{1} = 1 \\ x_1 + x_2 = -a \end{cases}$$

a) $x_1^2 + x_2^2 = 5$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\cdot(-a)$$

$$1 = x_1^2 + x_2^2 - 2a \Rightarrow \quad 1 + 2a = 5$$

$$2a = 4$$

$$a = 2.$$

b) $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3$

$$1^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3\cdot 1\cdot(-a)$$

$$1 = 8 - 3a \Rightarrow \quad 3a = 7$$

$$a = \frac{7}{3}$$

c) $${}^{x_2)}\frac{1}{x_1} + {}^{x_1)}\frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{-a} = \frac{1}{5} \Rightarrow \quad a = -5.$$

Exercițiul 3. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2+2x-a-1=0$ să existe relația:

$$x_1+x_2 = x_1^2+x_2^2$$

Rezolvare.

$$x^2+2x-a-1=0.$$

Atunci Relațiile lui Viète:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-a-1}{1} \end{cases}$$

$$x_1+x_2 = x_1^2+x_2^2$$

$$-2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

$$-2 = (-2)^2 - 2(-a-1)$$

$$-2 = 4 + 2a + 2$$

$$-2-6 = 2a$$

$$-8 = 2a \Rightarrow a = -8 : 2 = -4.$$

Exercițiul 4. Se consideră ecuația $x^2+mx+n=0$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.

Determinați m și n știind că mulțimea soluțiilor ecuației este:

a) $S=\{-2; -1\}$; b) $S=\{1, 3\}$; c) $S=\{-1, 2\}$.

Rezolvare.

a) Fie $x_1 = -2$

$x_2 = -1.$

Atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{1} \Rightarrow -2-1 = -m \Rightarrow -3=-m \Rightarrow m=3. \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} \Rightarrow (-2)\cdot(-1) = m \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

b) $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$.

Atunci $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \Rightarrow 1+3=-m \Rightarrow 4=-m \Rightarrow m=-4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \Rightarrow 1\cdot 3 = m \Rightarrow m=3. \end{cases}$

c) $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \Rightarrow -1+2=-m \Rightarrow -m=1 \Rightarrow m=-1 \\ x_1 \cdot x_2 = m \Rightarrow (-1)\cdot 2 = m \Rightarrow m=-2. \end{cases}$$

Exercițiul 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației: $x^2 - x + 2a = 0$ să satisfacă inegalitatea: $x_1 + x_2 < x_1^2 + x_2^2$.

Rezolvare:

$x^2 - x + 2a = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = +1 \\ x_1 \cdot x_2 = 2a \end{cases}$$

Atunci $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

$1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\cdot 2a$

$1 - 4a = x_1^2 + x_2^2$

iar $x_1 + x_2 < x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow 1 < 1-4a$

$\Leftrightarrow 4a < 0. \quad |:4$

$\Leftrightarrow a < 0$